МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Горно-Алтайский государственный университет»
(ФГБОУ ВО ГАГУ, ГАГУ, Горно-Алтайский государственный университет)

Методы решения олимпиадных задач по математике

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **кафедра математики, физики и информатики**

Учебный план 44.03.05_2025_675.plx
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Математика и Физика

Квалификация **бакалавр**

Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **7 ЗЕТ**

Часов по учебному плану 252
в том числе:
аудиторные занятия 74
самостоятельная работа 131,2
часов на контроль 43,6

Виды контроля в семестрах:
экзамены 10
зачеты 9

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**9 (5.1)**		**10 (5.2)**		Итого	
Недель	10 2/6		8			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП	УП	РП
Лекции	18	18	18	18	36	36
Практические	20	20	18	18	38	38
Консультации (для студента)	0,9	0,9	0,9	0,9	1,8	1,8
Контроль самостоятельной работы при проведении аттестации	0,15	0,15	0,25	0,25	0,4	0,4
Консультации перед экзаменом			1	1	1	1
Итого ауд.	38	38	36	36	74	74
Контактная работа	39,05	39,05	38,15	38,15	77,2	77,2
Сам. работа	96,1	96,1	35,1	35,1	131,2	131,2
Часы на контроль	8,85	8,85	34,75	34,75	43,6	43,6
Итого	144	144	108	108	252	252

Программу составил(и):
к.ф.-м.н., доцент, Байгонакова Г. А.

Рабочая программа дисциплины
Методы решения олимпиадных задач по математике

разработана в соответствии с ФГОС:
Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (приказ Минобрнауки России от 22.02.2018 г. № 125)

составлена на основании учебного плана:
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
утвержденного учёным советом вуза от 30.01.2025 протокол № 2.

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от 10.04.2025 протокол № 10

Зав. кафедрой И. о. зав. кафедрой: Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2026-2027 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ _____ 2026 г. № __
Зав. кафедрой И. о. зав. кафедрой: Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2027-2028 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ _____ 2027 г. № __
Зав. кафедрой И. о. зав. кафедрой: Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2028-2029 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ _____ 2028 г. № __
Зав. кафедрой И. о. зав. кафедрой: Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2029-2030 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ _____ 2029 г. № __
Зав. кафедрой И. о. зав. кафедрой: Богданова Рада Александровна

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	*Цели:* формирование систематизированных знаний по методам решения олимпиадных задач по математике.
1.2	*Задачи:* - развитие общей математической культуры; - создание математической базы для дальнейшего профессионального роста и успешного применения полученных знаний в практике преподавания математики в школе; - совершенствование навыков математического и логического мышления; - формирования опыта творческой деятельности через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.В.ДВ.03
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Элементарная математика
2.1.2	Алгебра
2.1.3	Аналитическая геометрия
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Методика решения задач ЕГЭ по математике и их критериальное оценивание
2.2.2	Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
ПК-3: Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов.
ИД-1.ПК-3: Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).
Владеет навыками анализа образовательной среды, умеет определять цель деятельности субъектов образовательного процесса и способы ее достижения по курсу школьной математики

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература	Инте ракт.	Примечание
	Раздел 1. Лекции						
1.1	1. Поиск родственных задач /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.2	2. Причёсывание задач (или «можно считать, что…») /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.3	3. Доказательство от противного /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.4	4. Чётность /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта

1.5	5. Обратный ход. Подсчёт двумя способами /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.6	6. Соответствие /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.7	7. Графы /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.8	8. Инварианты /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.9	9. Метод крайнего /Лек/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.10	10. Уход на бесконечность и малые шевеления /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.11	11. Принцип Дирихле /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.12	12. Индукция /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.13	13. Делимость и остатки /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.14	14. Алгоритм Евклида /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.15	15. Покрытия, упаковки и замощения /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.16	16. Раскраски /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.17	17. Игры /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
1.18	18. Процессы и операции /Лек/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Лекция-презентация. Выполнение конспекта
	Раздел 2. Практические занятия						
2.1	1. Поиск родственных задач /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.2	2. Причёсывание задач (или «можно считать, что…») /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для

2.3	3. Доказательство от противного /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.4	4. Чётность /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.5	5. Обратный ход. /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.6	6. Подсчёт двумя способами /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.7	7. Соответствие /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.8	8. Графы /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.9	9. Инварианты /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.10	10. Метод крайнего /Пр/	9	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.11	11. Уход на бесконечность и малые шевеления /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.12	12. Принцип Дирихле /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.13	13. Индукция /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.14	14. Делимость и остатки /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.15	15. Алгоритм Евклида /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.16	16. Покрытия, упаковки и замощения /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.17	17. Раскраски /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
2.18	18. Игры /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для

2.19	19. Процессы и операции /Пр/	10	2	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Выполнение конспекта. Оценочные средства для
	Раздел 3. Самостоятельная работа						
3.1	1. Поиск родственных задач /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.2	2. Причёсывание задач (или «можно считать, что…») /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.3	3. Доказательство от противного /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.4	4. Чётность /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.5	5. Обратный ход /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.6	6. Подсчёт двумя способами /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.7	7. Соответствие /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.8	8. Графы /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.9	9. Инварианты /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.10	10. Метод крайнего /Ср/	9	9,61	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.11	11. Уход на бесконечность и малые шевеления /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.12	12. Принцип Дирихле /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.13	13. Индукция /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.14	14. Делимость и остатки /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.15	15. Алгоритм Евклида /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в

3.16	16. Покрытия, упаковки и замощения /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.17	17. Раскраски /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.18	18. Игры /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
3.19	19. Процессы и операции /Ср/	10	3,9	ИД-1.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4	0	Решение разноуровневых задач, приведенных в
	Раздел 4. Консультации						
4.1	Консультация по дисциплине /Конс/	9	0,9	ИД-1.ПК-3		0	
	Раздел 5. Промежуточная аттестация (зачёт)						
5.1	Подготовка к зачёту /Зачёт/	9	8,85	ИД-1.ПК-3		0	
5.2	Контактная работа /КСРАтт/	9	0,15	ИД-1.ПК-3		0	
	Раздел 6. Консультации						
6.1	Консультация по дисциплине /Конс/	10	0,9	ИД-1.ПК-3		0	
	Раздел 7. Промежуточная аттестация (экзамен)						
7.1	Подготовка к экзамену /Экзамен/	10	34,75	ИД-1.ПК-3		0	
7.2	Контроль СР /КСРАтт/	10	0,25	ИД-1.ПК-3		0	
7.3	Контактная работа /КонсЭк/	10	1	ИД-1.ПК-3		0	

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Пояснительная записка

1. Назначение фонда оценочных средств. Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Методы решения олимпиадных задач по математике».
2. Фонд оценочных средств включает контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме разноуровневых заданий, контрольной работы и промежуточной аттестации в форме вопросов к зачету и экзамену.

5.2. Оценочные средства для текущего контроля

Оценочные средства - разноуровневые задачи для проведения текущего контроля к практическим занятиям и варианты контрольной работы приведены в приложениях. Задания для контрольной работы составляют из задач, которые не были рассмотрены на практических занятиях.

5.3. Темы письменных работ (эссе, рефераты, курсовые работы и др.)

Письменные работы при реализации дисциплины не предусмотрены

5.4. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Задания к зачету и экзамену
Разработать план-конспект занятия спецкурса по решению олимпиадных задач по пройденным темам с подробным разбором каждой задачи и в качестве наглядности подготовить презентацию.

Примерные вопросы к зачету

1. Поиск родственных задач
2. Причёсывание задач (или «можно считать, что…»)
3. Доказательство от противного
4. Чётность
5. Обратный ход. Подсчёт двумя способами
6. Подсчёт двумя способами
7. Соответствие
8. Графы
9. Инварианты
10. Метод крайнего

Критерии оценивания:
«Зачтено», повышенный уровень – Зачтено» выставляется студенту, если студент обнаружил степень сформированности компетенций, соответствующий продвинутому уровню. При этом студент демонстрирует всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой. Кроме того, студент усвоил взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии и умеет применять их в практической деятельности.
«Зачтено», пороговый уровень – «Зачтено» выставляется студенту, если студент обнаружил степень сформированности компетенций, соответствующий базовому уровню. При этом он продемонстрировал знание основного учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справился с выполнением более 60% заданий, предусмотренных программой. Допустил неточности и ошибки при выполнении заданий, смог при помощи преподавателя их устранить
«Незачтено», уровень не сформирован – вопросы не раскрыты, обнаруживаются пробелы в знаниях, существенное непонимание основных вопросов курса.

Примерные вопросы к экзамену

1. Поиск родственных задач
2. Причёсывание задач (или «можно считать, что…»)
3. Доказательство от противного
4. Чётность
5. Обратный ход. Подсчёт двумя способами
6. Подсчёт двумя способами
7. Соответствие
8. Графы
9. Инварианты
10. Метод крайнего
11. Уход на бесконечность и малые шевеления
12. Принцип Дирихле
13. Индукция
14. Делимость и остатки
15. Алгоритм Евклида
16. Покрытия, упаковки и замощения
17. Раскраски
18. Игры
19. Процессы и операции

Критерии оценки:
Отметка «отлично» ставится, если знания отличаются глубиной и содержательностью, дается полный исчерпывающий ответ, как на основные вопросы билета, так и на дополнительные:
– студент свободно владеет понятийным аппаратом;
– студент способен к интеграции знаний по определенной теме, структурированию ответа, к анализу положений существующих теорий, научных школ, направлений по вопросу билета;
– логично и доказательно раскрывает проблему, предложенную в билете;
– ответ не содержит фактических ошибок и характеризуется глубиной, полнотой, уверенностью студента;
– ответ иллюстрируется примерами, в том числе из собственной практики;
– студент демонстрирует умение вести диалог и вступать в научную дискуссию.
Отметка «хорошо» ставится, если: знания имеют достаточный содержательный уровень, однако отличаются слабой структурированностью; раскрыто содержание билета, имеются неточности при ответе на дополнительны вопросы:
– в ответе имеют место несущественные фактические ошибки, которые студент способен исправить самостоятельно, благодаря наводящему вопросу;
– недостаточно раскрыта проблема по одному из вопросов билета;
– недостаточно логично построено изложение вопроса;
– ответ прозвучал недостаточно уверенно;
– студент не смог показать способность к интеграции и адаптации знаний или теории и практики.
Отметка «удовлетворительно» ставится, если знания имеют фрагментарный характер, отличаются поверхностностью и малой содержательностью, содержании билета раскрыто слабо, имеются неточности при ответе на основные вопросы билета:
– программный материал в основном излагается, но допущены фактические ошибки;
– ответ носит репродуктивный характер;
– студент не может обосновать закономерности и принципы, обосновать факты;
– нарушена логика изложения, отсутствует осмысленность представляемого материала;
– у студента отсутствует представление о межпредметных связях.
Отметка «неудовлетворительно» ставится, если:
– обнаружено незнание или непонимание студентом части предложенного к рассмотрению материала;
– допускаются существенные фактические ошибки, которые студент не может исправить самостоятельно;
– на большую часть дополнительных вопросов по содержанию экзамена студент затрудняется дать ответ или не дает

верных ответов.

Примерные тесты для проверки компетенции :
1. Задачу, содержащую познавательное противоречие, процесс решения которого способствует формированию у учащихся исследовательских умений, таких как умение находить аналогии и связи между разными объектами и разными свойствами одного объекта, обобщать известные факты и выделять частные случаи, устанавливать причинно-следственные связи между объектами, проводить геометрическую и физическую интерпретацию аналитических свойств называют (ПК-3).
а) исследовательская задача
б) познавательная задача
в) проблемная задача
Ключ: а.
2. Установите соответствие: (ПК-3)
А) Метод от противного 1) Преобразование исходного выражения или уравнения в более удобную форму для решения.
Б) Метод преобразований 2) Предположение, противоположное тому, что нужно доказать, приводит к противоречию, что подтверждает исходное утверждение.
В) Метод графического решения 3) Использование графиков функций для визуализации и решения задач.
Ключ: А2, Б1, В3.
3. Верно ли, что олимпиадные задачи в математике — термин для обозначения круга задач, для решения которых нет готовых (и ранее изученных) алгоритмов и часто требуется оригинальный, нешаблонный подход. (ПК-3).
Ключ: верно.
4. Результатами осуществления дополнительного образования в сфере математики является (ПК-3):
Варианты ответа:
а. Формирование и развитие математических способностей
б. Личностное развитие обучающихся
в. Дополнительные компетенции в сфере математического образования
г. Все вышеназванные варианты.
Ключ: г

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л1.1	Воробьев Г. А.	Олимпиадные задачи (математика): учебно-методическое пособие	Липецк: Липецкий ГПУ, 2021	https://e.lanbook.com/book/228677
Л1.2	Андреев А. А., Карпухина М. И., Максимова Е. А., Скородумова Е. А.	Олимпиада школьников ТИИМ-технологии. Интеллект. Информатика. Математика. Задания, решения, статистика. 2020/2021 учебный год: учебное пособие	Москва: МТУСИ, 2021	https://e.lanbook.com/book/215174

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л2.1	Шестакова Л. Г.	Методика обучения школьников работать с математической задачей: учебное пособие для студентов	Соликамск: Соликамский государственный педагогический институт, 2013	https://www.iprbookshop.ru/47876.html
Л2.2	Далингер В. А.	Задачи с параметрами: учебное пособие	Омск: Амфора, 2012	https://icdlib.nspu.ru/catalogs/details/icdlib/852233.php
Л2.3	Далингер В. А.	Задачи с модулями: учебное пособие	Омск: ОмГПУ, 2010	https://icdlib.nspu.ru/catalogs/details/icdlib/852232.php
Л2.4	Леонтьева Н. В.	Вопросы обучения школьников решению олимпиадных задач и задач повышенной трудности по математике: учебно-методическое пособие	Глазов: ГГПИ им. Короленко, 2022	https://e.lanbook.com/book/292271

6.3.1 Перечень программного обеспечения

6.3.1.1	Kaspersky Endpoint Security для бизнеса СТАНДАРТНЫЙ
6.3.1.2	MS Office
6.3.1.3	Яндекс.Браузер

6.3.1.4	LibreOffice
6.3.1.5	Moodle
6.3.1.6	NVDA
6.3.1.7	SMART Notebook
6.3.1.8	MS Windows
6.3.1.9	РЕД ОС
6.3.2 Перечень информационных справочных систем	
6.3.2.1	Электронно-библиотечная система IPRbooks
6.3.2.2	База данных «Электронная библиотека Горно-Алтайского государственного университета»
6.3.2.3	Электронно-библиотечная система «Издательство Лань»

7. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ		
	презентация	
	проблемная лекция	

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Номер аудитории	**Назначение**	**Основное оснащение**
206 Б1	Кабинет методики преподавания математики. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Ученическая доска, интерактивная доска, экран, проектор, компьютер, посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), рабочее место преподавателя
209 Б1	Компьютерный класс. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Помещение для самостоятельной работы	Рабочее место преподавателя. Посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся). Маркерная ученическая доска, экран, мультимедиапроектор, компьютеры с доступом в Интернет
207 Б1	Лекционная аудитория. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Ученическая доска, проектор, экран, системный блок, посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), рабочее место преподавателя

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Методические указания по освоению дисциплин (модулей)

Лекции, с одной стороны – это одна из основных форм учебных занятий в высших учебных заведениях, представляющая собой систематическое, последовательное устное изложение преподавателем определенного раздела конкретной науки или учебной дисциплины, с другой – это особая форма самостоятельной работы с учебным материалом. Лекция не заменяет собой книгу, она только подталкивает к ней, раскрывая тему, проблему, выделяя главное, существенное, на что следует обратить внимание, указывает пути, которым нужно следовать, добиваясь глубокого понимания поставленной проблемы, а не общей картины.
Работа на лекции – это сложный процесс, который включает в себя такие элементы как слушание, осмысление и собственно конспектирование. Для того, чтобы лекция выполнила свое назначение, важно подготовиться к ней и ее записи еще до прихода преподавателя в аудиторию. Без этого дальнейшее восприятие лекции становится сложным. Лекция в университете рассчитана на подготовленную аудиторию. Преподаватель излагает любой вопрос, ориентируясь на те знания, которые должны быть у студентов, усвоивших материал всех предыдущих лекций.Важно научиться слушать преподавателя во время лекции, поддерживать непрерывное внимание к выступающему.
Однако, одного слушания недостаточно. Необходимо фиксировать, записывать тот поток информации, который сообщается во время лекции – научиться вести конспект лекции, где формулировались бы наиболее важные моменты, основные положения, излагаемые лектором. Для ведения конспекта лекции следует использовать тетрадь. Ведение

конспекта на листочках не рекомендуется, поскольку они не так удобны в использовании и часто теряются. При оформлении конспекта лекции необходимо оставлять поля, где студент может записать свои собственные мысли, возникающие параллельно с мыслями, высказанными лектором, а также вопросы, которые могут возникнуть в процессе слушания, чтобы получить на них ответы при самостоятельной проработке материала лекции, при изучении рекомендованной литературы или непосредственно у преподавателя в конце лекции. Составляя конспект лекции, следует оставлять значительный интервал между строчками. Это связано с тем, что иногда возникает необходимость вписать в первоначальный текст лекции одну или несколько строчек, имеющих принципиальное значение и почерпнутых из других источников. Расстояние между строками необходимо также для подчеркивания слов или целых групп слов (такое подчеркивание вызывается необходимостью привлечь внимание к данному месту в тексте при повторном чтении). Обычно подчеркивают определения, выводы.

Также важно полностью без всяких изменений вносить в тетрадь схемы, таблицы, чертежи и т.п., если они предполагаются в лекции. Для того, чтобы совместить механическую запись с почти дословным фиксированием наиболее важных положений, можно использовать системы условных сокращений. В первую очередь сокращаются длинные слова и те, что повторяются в речи лектора чаще всего. При этом само сокращение должно быть по возможности кратким.

Семинарские (практические) занятия Самостоятельная работа студентов по подготовке к семинарскому (практическому) занятию должна начинаться с ознакомления с планом семинарского (практического) занятия, который включает в себя вопросы, выносимые на обсуждение, рекомендации по подготовке к семинару (практическому занятию), рекомендуемую литературу к теме. Изучение материала следует начать с просмотра конспектов лекций. Восстановив в памяти материал, студент приводит в систему основные положения темы, вопросы темы, выделяя в ней главное и новое, на что обращалось внимание в лекции. Затем следует внимательно прочитать соответствующую главу учебника.

Для более углубленного изучения вопросов рекомендуется конспектирование основной и дополнительной литературы. Читая рекомендованную литературу, не стоит пассивно принимать к сведению все написанное, следует анализировать текст, думать над ним, этому способствуют записи по ходу чтения, которые превращают чтение в процесс. Записи могут вестись в различной форме: развернутых и простых планов, выписок (тезисов), аннотаций и конспектов.

Подобрав, отработав материал и усвоив его, студент должен начать непосредственную подготовку своего выступления на семинарском (практическом) занятии для чего следует продумать, как ответить на каждый вопрос темы.

По каждому вопросу плана занятий необходимо подготовиться к устному сообщению (5-10 мин.), быть готовым принять участие в обсуждении и дополнении докладов и сообщений (до 5 мин.).

Выступление на семинарском (практическом) занятии должно удовлетворять следующим требованиям: в нем излагаются теоретические подходы к рассматриваемому вопросу, дается анализ принципов, законов, понятий и категорий; теоретические положения подкрепляются фактами, примерами, выступление должно быть аргументированным.

Самостоятельная работа обучающихся– это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Объем самостоятельной работы определяется учебным планом основной профессиональной образовательной программы (ОПОП), рабочей программой дисциплины (модуля).

Самостоятельная работа организуется и проводится с целью формирования компетенций, понимаемых как способность применять знания, умения и личностные качества для успешной практической деятельности, в том числе:

- формирования умений по поиску и использованию нормативной, правовой, справочной и специальной литературы, а также других источников информации;
- качественного освоения и систематизации полученных теоретических знаний, их углубления и расширения по применению на уровне межпредметных связей;
- формирования умения применять полученные знания на практике (в профессиональной деятельности) и закрепления практических умений обучающихся;
- развития познавательных способностей, формирования самостоятельности мышления обучающихся;
- совершенствования речевых способностей обучающихся;
- формирования необходимого уровня мотивации обучающихся к систематической работе для получения знаний, умений и владений в период учебного семестра, активности обучающихся, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования способностей к саморазвитию (самопознанию, самоопределению, самообразованию, самосовершенствованию, самореализации и саморегуляции);
- развития научно-исследовательских навыков;
- развития навыков межличностных отношений.

К самостоятельной работе по дисциплине (модулю) относятся: проработка теоретического материала дисциплины (модуля);подготовка к семинарским и практическим занятиям, в т.ч. подготовка к текущему контролю успеваемости обучающихся(текущая аттестация); подготовка к лабораторным работам; подготовка к промежуточной аттестации (зачётам, экзаменам).

Виды, формы и объемы самостоятельной работы обучающихся при изучении дисциплины (модуля) определяются:

- содержанием компетенций, формируемых дисциплиной (модулем);
- спецификой дисциплины (модуля), применяемыми образовательными технологиями;
- трудоемкостью СР, предусмотренной учебным планом;
- уровнем высшего образования (бакалавриат, специалитет, магистратура, аспирантура), на котором реализуется ОПОП;
- степенью подготовленности обучающихся.

Оценочные материалы

Контрольная работа № 1. Исследовательские задачи по теории чисел и алгебре

1. Докажите:

а) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$;

б) $m \cdot C_n^m = n \cdot C_{n-1}^{m-1}$;

в) $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m \cdot \frac{n+1}{m+1}$.

2. Напишите разложение по формуле бинома Ньютона и упростите при необходимости:

а) $(a + b)^4$; б) $(a — b)^4$; в) $(a + 2b)^5$; г) $(a – 2b)^5$;

д) $(1 + 2x)^5$; е) $\left(\frac{1}{2}a + b\right)^7$; ж) $\left(a - \frac{2}{b}\right)^5$; з) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^5$;

и) $\left(x + \frac{1}{2}x\right)^8$; к) $(1+\sqrt{2})^5$; л) $(1-\sqrt{2})^5$; м) $(a-\sqrt{6})^6$;

н) $(b+\sqrt{6})^6$; о) $(\sqrt{6}+\sqrt{12})^4$; п) $\frac{1}{27}(\sqrt{3}-\sqrt{15})^6$;

ж) $\left(a - \frac{2}{b}\right)^5$; з) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^5$; и) $\left(x + \frac{1}{2}x\right)^8$;

к) $(1+\sqrt{2})^5$; л) $(1-\sqrt{2})^5$; м) $(a-\sqrt{6})^6$;

3. Найдите:

а) шестой член разложения $(1 — 2z)^{21}$;

б) шестой член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{15}$;

в) пятый член разложения $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$;

г) пятый член разложения $(\sqrt{z} + z)^{10}$;

д) два средних члена разложения $(a^3\text{-}ab)^{23}$;

е) в разложении $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^{18}$ член, не содержащий x;

ж) в разложении $\left(1 + \frac{1}{z^3}\right)^{18}$ член, не содержащий z;

з) в разложении $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{12}$ коэффициент при a^8;

и) в разложении $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$ коэффициент при x^4;

к) x, если третий член разложения $(x + x^{\lg x})^5$ равен 10^6.

4. Доказать методом математической индукции:

1) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = \frac{(-1)^{n-1} \cdot n(n+1)}{2}$;

2) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

3) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;

4) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;

5) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

6) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

7) $-1+3-5+7-\ldots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n\cdot n$;

8) $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

9) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

10) $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

5. На районном марафоне нам была предложена задача: Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4?

6. Олимпиадная задача. Докажите, что число 13026970 делится на 55.

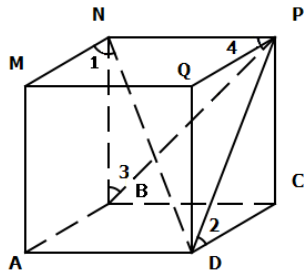
7. Докажите, что число 4356 можно представить в виде квадрата трех множителей.

8. Вычеркните в числе 181615121 три цифры так, чтобы полученное число делилось на 12. В ответе укажите какое-нибудь такое число.

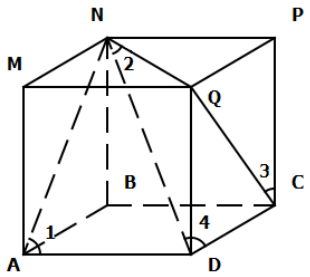
9. Найдите шестизначное натуральное число, кратное 12, произведение цифр которого равно 40. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

10. Приведите пример трехзначного натурального числа, которое при делении на 4 и на 15 дает равные ненулевые остатки, и первая справа, цифра которого является средним арифметическим двух других цифр.

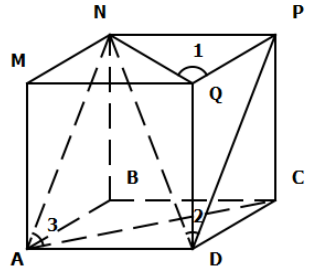
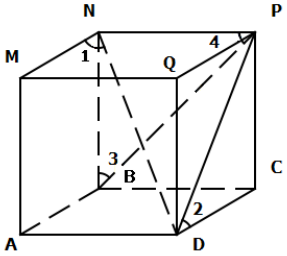
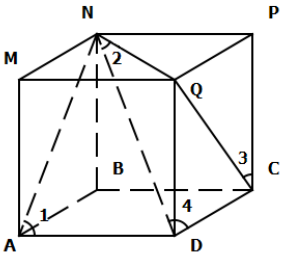
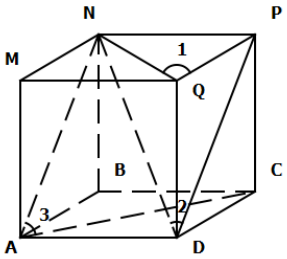
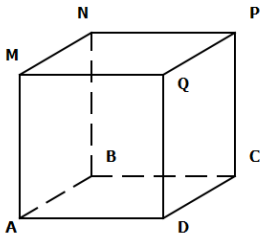
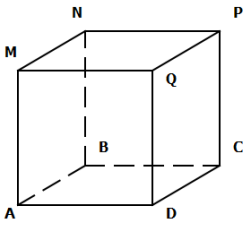
Контрольная работа №2. Геометрические задачи исследовательского характера в школьной математике

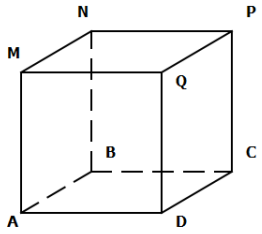
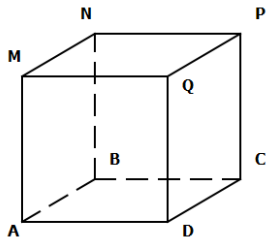
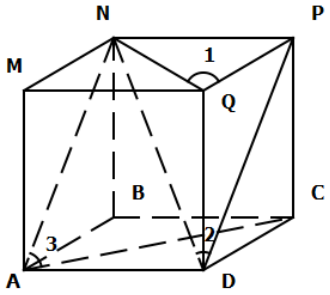
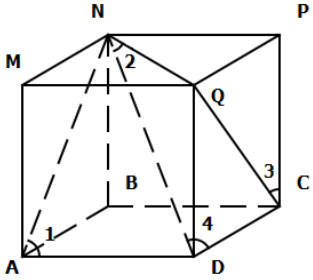


ABCDMNPQ – куб.
Укажите из отмеченных на рисунке углы между прямой и плоскостью. Докажите правильность своего выбора.



ABCDMNPQ - куб.
Укажите из отмеченных на рисунке углы между прямой и плоскостью. Докажите правильность своего выбора.

 ABCDMNPQ - куб. Докажите, что а) угол 1 – это угол между прямой NQ и плоскостью (DQPC); б) угол 2 не является углом между прямой DP и плоскостью (BNQD); в) угол 3 не является углом между прямой AN и плоскостью (ABCD).	 ABCDMNPQ - куб. Докажите, что а) угол 1 не является углом между прямой DN и плоскостью (AMNB); б) угол 3 – это угол между прямой PB и плоскостью (AMNB); в)угол 4 не является углом между прямой BP и плоскостью (DQPC).
 Найдите ошибку. ABCDMNPQ - куб. На рисунке указаны: а) угол 1 – это угол между прямой AN и плоскостью (ABCD); б) угол 2 – это угол между прямой ND и плоскостью (MNPQ); в) угол 3 – это угол между прямой QC и плоскостью (BNPC); Докажите.	 Найдите ошибку. ABCDMNPQ - куб. На рисунке указаны: а) угол 1 – это угол между прямой NQ и плоскостью (DQPC); б) угол 2 – это угол между прямой DP и плоскостью (BNQD); в) угол 3 – это угол между прямой AC и плоскостью (AMNB). Докажите.
 ABCDMNPQ - куб. Постройте угол а) между прямой DN и плоскостью (ABCD); б) между прямой DN и плоскостью (AMNB); в) между прямой DN и плоскостью (BNPC); г) между прямой DN и плоскостью (AMPC).	 ABCDMNPQ - куб. Постройте угол а) между прямой DN и плоскостью (MNPQ); б) между прямой DN и плоскостью (DQPC); в) между прямой DN и плоскостью (AMQD); г) между прямой DP и плоскостью (AMPC).

 ABCDMNPQ - куб. 1. Чему равна величина угла между прямой DP и плоскостью (BNPC)? 2. Чему равен ctg угла между прямой ND и плоскостью (MNPQ)? 3. Чему равна величина угла между прямой NQ и плоскостью (DQPC)? 4. Чему равна величина угла между прямой DP и плоскостью (BNQD)?	 ABCDMNPQ - куб. 1. Чему равна величина угла между прямой NC и плоскостью (AMNB)? 2. Чему равен tg угла между прямой ND и плоскостью (DQPC)? 3. Чему равна величина угла между прямой DP и плоскостью (AMPC)? 4. Чему равен tg угла между прямой DP и плоскостью (BNQD)?
 ABCDMNPQ - куб. Укажите из отмеченных на рисунке углы между прямой и плоскостью. Докажите правильность своего выбора.	 ABCDMNPQ - куб. Укажите из отмеченных на рисунке углы между прямой и плоскостью. Докажите правильность своего выбора.

Индивидуальные задания

Задание 1. Олимпиадные задачи по классам

7 класс

7.1. Можно ли в таблице 5 × 5 клеток расставить 25 чисел так, чтобы сумма четырех чисел в каждом квадрате 2 × 2 была отрицательной, а сумма всех 25 чисел положительной?

7.2. Существует ли такое натуральное число n, что

$$n + n^2 + n^3 + \ldots + n^9 = (n + 1)^{10}?$$

7.3. К некоторому двузначному числу слева и справа приписали по единице. В результате получили число в 23 раза больше первоначального. Найдите это двузначное число.

7.4. Из точки старта на велотреке круглой формы стартовали одновременно в одном направлении с постоянными, но разными скоростями два велосипедиста. Первый из них делает круг за 4 мин 40 с, второй – за 5,5 мин. Через некоторое время после старта первый велосипедист догнал второго, и они со скоростью второго велосипедиста доехали до точки старта вместе. Сколько минут они ехали вместе?

7.5. Попробуйте отыскать простой способ вычисления суммы

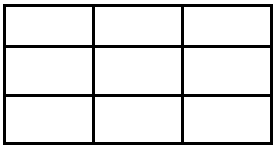
$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\frac{1}{9\cdot11}+\frac{1}{11\cdot13}+\frac{1}{13\cdot15}+\frac{1}{15\cdot17}++\frac{1}{17\cdot19}+\frac{1}{19\cdot21}$$

и найдите её.

8 класс

8.1. Восстановите цифры x, y, z в равенстве $\overline{x5}\cdot\overline{3yz}=7850$

8.2. Дана квадратная таблица 3×3, заполненная натуральными числами. За один ход разрешается к любым двум соседним числам прибавить одно и то же число. (Соседними считаются числа, которые записаны в клетках, имеющих общую сторону.) Можно ли за несколько ходов получить: а) таблицу, во всех клетках которой записаны нули? Б) таблицу, в угловых клетках которой записаны единицы, а в остальных пяти клетках – нули?



8.3. Докажите, что при любом натуральном *n* число $4^n + 5$ делится на 3.

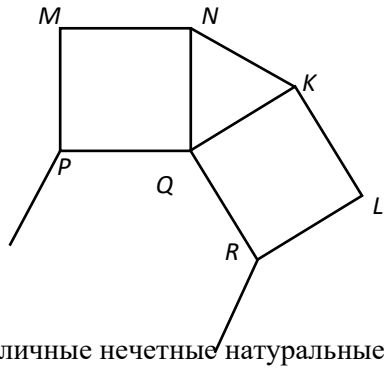
8.4. Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Найти углы треугольника.

8.5. Некоторую работу могут выполнить трое рабочих. Второй и третий могут вместе выполнить ее в три раза быстрее первого; первый и третий могут вместе выполнить ее в три раза быстрее второго. Во сколько раз первый и второй могут выполнить эту работу быстрее, чем третий?

9 класс

9.1. Найдите четырехзначное число, которое в 4 раза меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

9.2. На сторонах правильного *n*-угольника вне его построены квадраты. Известно, что 2*n*-угольник, образованный вершинами этих квадратов, отличных от вершин *n*-угольника, является правильным. При каких значениях это возможно?



9.3. Существуют ли различные нечетные натуральные числа *k, l* и *m*, такие, что выполняется равенство

$$\frac{1}{1991} = \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}?$$

9.4. Диагонали AC и BD трапеции ABCD (AD||CB) взаимно перпендикулярны, длина средней линии трапеции равна *m*. На большем основании AD взята точка M так, что AM=*m*. Найдите длину отрезка MC.

9.5. Найти все решения уравнения $x^2 - y^2 = 1996$ в целых числах.

10 класс

10.1. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. Медиана AM пересекает высоту CH и отрезок BD в точках N и K соответственно. Докажите, что если AK = BK, то AN = 2KM.

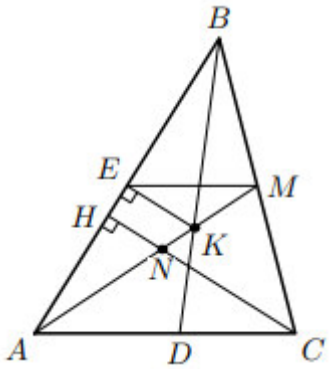


Рисунок 1

10.2. Имеется семь стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй – на треть, третий – на четверть, четвертый – на одну пятую, пятый – на одну восьмую, шестой – на одну девятую, и седьмой – на одну десятую. Разрешается переливать всю воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока он не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться заполненным

а) на одну двенадцатую; б) на одну шестую?

10.3. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1 = 0$ имеет четыре различных действительных корня.

10.4. Найдите все простые числа, которые являются одновременно суммой двух простых чисел и разностью двух простых чисел.

10.5. Дан четырехугольник ABCD, в котором AB = AD и $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

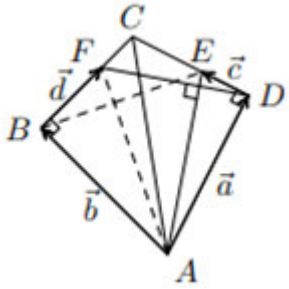


Рисунок 2

11 класс

11.1. Найдите все натуральные числа n, для которых сумма цифр числа 5^n равна 2^n.

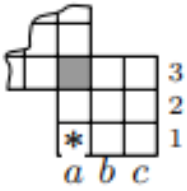


Рисунок 1

11.2. Точка O – основание высоты четырехугольной пирамиды. Сфера с центром O касается всех боковых граней пирамиды. Точки A, B, C, D взяты последовательно по одной на боковых ребрах пирамиды так, что

отрезки AB, BC и CD проходят через три точки касания сферы с гранями. Докажите, что отрезок AD проходит через четвертую точку касания.

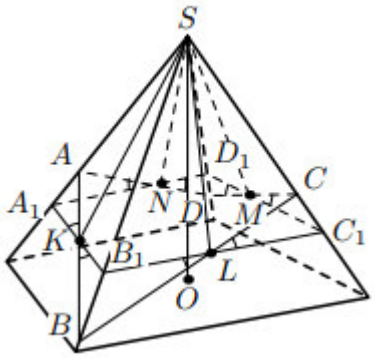


Рисунок 2

11.3. В прямоугольном параллелепипеде одно из сечений является правильным шестиугольником. Докажите, что этот параллелепипед – куб.

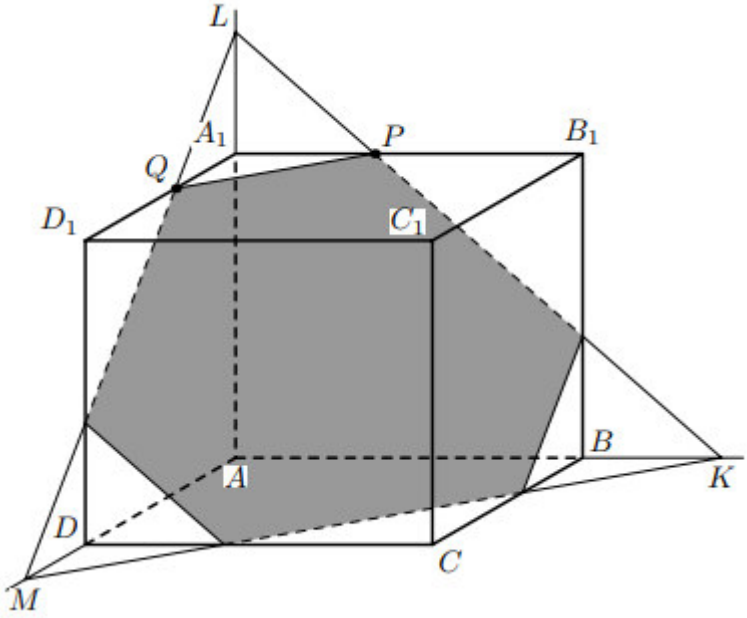


Рисунок 3

11.4. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

11.5. Существуют ли действительные числа a, b и c такие, что при всех действительных x и y выполняется неравенство

$$|x + a| + |x + y + b| + |y + c| > |x| + |x + y| + |y|?$$

Задание 2 . Методы решения уравнений и неравенств с модулями. Методы решения задач, содержащих параметры

14. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2ay - a^2 + 1 \\ y + a \le |x| \end{cases}$$

имеет ровно два решения ?

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди решений неравенства $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ нет ни одной точки отрезка $[7;96]$.

3. При каких значениях параметра n уравнение $(n^2 - 4)x = n^3 - 2n^2 - n + 2$

а) имеет единственный корень;

б) имеет бесконечное множество корней;

в) не имеет корней.

4. Решить уравнение $\left|\frac{x^2+2x+1}{x}\right| = \frac{x^2+2x+1}{x}$.

5. Решить уравнение $|x^3+x-1| = |x^3-x+1|$.

6. Решить уравнение $|x^2-1|+|x^2-5x+6| = 5x-7$.

7. Решить уравнение $|81x^4-16| > 81x^4-16$.

8 Решить уравнение $|x-2|+|x-3|+|2x-8| = 9$.

9. Чему равна сумма корней уравнения (корень, если он один) уравнения

$$\frac{|3x-4|+x^2-12|x|+36}{x-5} = |x-2|?$$

10. Решить уравнение $\frac{|x^3+x|}{|x+1|} = \frac{2}{x+1}$.

11. Решить уравнение $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-4x+4} = 3$.

12. Решить уравнение $||x^3+x+1|-\sqrt{x}| = x^3-x-\sqrt{x}-1$.

13. Решить неравенство $||x^3+x+1|-\sqrt{x}| > x^3-x-\sqrt{x}-1$.

14. Решить неравенство $\frac{|x^2-3x+2|-x^2+2x-1}{|x|-|x-1|} \le 0$.

Задание 3. Геометрические задачи исследовательского характера в школьной математике

1. В основании пирамиды лежит треугольник с внутренними углами α и β и радиусом описанной окружности R. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом γ. Найдите объём пирамиды.

Указание: Нужно обосновать:

а) построение изображения основания высоты пирамиды;

б) построение углов между боковыми рёбрами пирамиды и плоскостью её основания.

2. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны a и b, а его диагональ составляет с боковой гранью, содержащей сторону a, угол 30°. Найдите объём параллелепипеда.

Указание: Нужно обосновать построение угла между диагональю параллелепипеда и его боковой гранью.

3. Чему равен объём прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого длины a составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью – угол β ?

Указание: Нужно обосновать:

а) построение угла между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания;

б) построение угла между диагональю и плоскостью боковой грани.

4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания равна 4 см. Найдите длину большей диагонали параллелепипеда, зная, что меньшая образует с плоскостью основания угол 60°.

Указание. Установить, какая из диагоналей параллелепипеда является меньшей (использовать свойства наклонных к плоскости и их проекций на эту плоскость). Обосновать построение угла между меньшей диагональю и плоскостью нижнего основания параллелепипеда.

5. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной 4 см и углом 60°. Большая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания 45°. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

Указание. Установить, какая из диагоналей параллелепипеда является большей. Обосновать построение угла между этой диагональю и плоскостью нижнего основания.

6. дно ребро тетраэдра равно 4 см, а каждое из остальных 3 см. Найдите объём тетраэдра.

Указание. Обосновать построение изображения основания высоты пирамиды. В качестве основания тетраэдра можно брать равнобедренный треугольник (когда все боковые рёбра равны) или равносторонний треугольник; в первом случае обоснование чертежа является более простым.

7. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна $3\sqrt{3}$ см, а её боковое ребро $3\sqrt{5}$ см. Найдите величину двугранного угла при основании пирамиды.

Указание. Нужно обосновать:

а) в какую точку плоскости основания проецируется вершина пирамиды;

б) построение на чертеже линейного угла двугранного угла при основании пирамиды.

8. В треугольнике ABC AC=BC=10 см, <A=<B=30°. Прямая BD перпендикулярна плоскости данного треугольника и BD= 5 см. Найдите расстояние от точки D до прямой AC.

Указание. Нужно обосновать построение изображения перпендикуляра из точки D на прямую AC. При этом следует учесть, что <ACB тупой, и потому основание этого перпендикуляра будет внешней точкой по отношению к отрезку AC

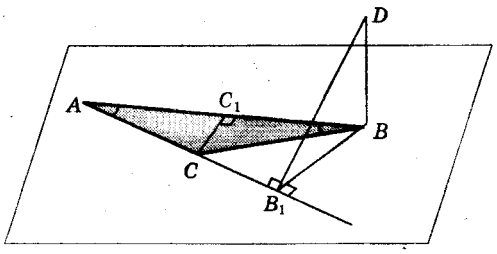


Рис. 15

9.Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от вершины угла на расстояние a, а от сторон на расстояние b. Найдите расстояние от точки M до плоскости угла.

Указание. Обосновать построение проекций точки M на плоскость, в которой лежит данный угол, и на его обе стороны.

10. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4 см. Данная точка находится на расстоянии 6 см от плоскости треугольника и на равных расстояниях от его вершин. Найдите это расстояние.

Указание. Необходимо обосновать построение изображения основания перпендикуляра из данной точки на плоскость данного треугольника.

11. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите высоту пирамиды.

Указание. Нужно обосновать:

а) построение точки, являющейся основанием высоты пирамиды;

б) построение линейных углов двухгранных углов при основании пирамиды.

12. Вычислите объём четырёхугольной пирамиды, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с нижним основанием 2 см, боковой стороной 1см и острым углом 60°, если известно, что все боковые рёбра пирамиды равны 2 см.

Указание. Обосновать построение изображения высоты (доказать при проведении обоснования чертежа, что основанием высоты пирамиды будет являться середина нижнего основания трапеции).

13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром *a*. Вычислите площадь сечения этого куба плоскостью, проходящей через диагональ AB_1 боковой грани и середину M ребра CD.

14. Найдите площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину D и середины M и N рёбер A_1B_1 и B_1C_1 , если ребро куба равно 1.

15. Высота цилиндра 8см, радиус основания 5см. Цилиндр пересечён плоскостью так, что в сечении получается квадрат. Найдите расстояние от плоскости сечения до оси цилиндра.

Указание. Доказать, что в сечении цилиндра плоскостью может получиться квадрат лишь в том случае, когда секущая плоскость параллельна оси цилиндра, причём высота цилиндра не должна превышать диаметра основания. Обосновать построение отрезка, выражающего расстояние от прямой (оси цилиндра) до параллельной ей плоскости (секущей).

16. Образующая конуса равна 6 см и образует с его основанием угол 45°. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проведённой через две его образующие, угол между которыми равен 60°.

Указание. Необходимо обосновать:

а) построение угла между образующей конуса и плоскостью его основания;

б) существование сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми равен 60° (найдутся ли среди множества образующих конуса две такие, угол между которыми 60°?).

17. В трапеции ABCD известны боковые стороны AB = 7; CD = 28 и верхнее основание BC = 5. Известно, что $\cos \angle BCD = \frac{2}{7}$. Найдите AC.

18. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90; \angle AO_2B = 60; OO_1 = a$. Найдите радиусы окружностей.

19. Точки A_1, B_1, C_1 – основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60° и 30°. Найдите углы треугольника ABC.

20. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции.

21. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

22. Прямая касается окружностей R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами равно a, причём r <R и r+R<a. Найти AB.

23. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Известно, что AB = 6 и BC = 12. Найти AC.

24. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что CH=AB. Найдите угол ACB.

25. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

26. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O – центр вписанной окружности. Известно, что BC = 24; MN = 12. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

27. Через середину стороны AB квадрата ABCD проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образуя с пря мой AB угол α , $tg\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата ABCD равна 4.

28. Дан параллелограмм ABCD, AB = 2, BC = 3, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершин одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника ABOD.

29. Дан параллелограмм ABCD AB = 3, BC = 5, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника ABOD.

30. В прямоугольнике ABCDAB = 2, BC = $\sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE.